Algèbres stellaires et algèbres de von Neumann

Henrik Densing Petersen
Notes rédigées par Maxime Gheysens

Automne 2013

Chapitre 1

Introduction

1.1 Rappels

Espaces de Hilbert Rappelons qu'un *espace de Hilbert* est un espace vectoriel (complexe) $\mathcal{H}$ muni d'un produit scalaire, c'est-à-dire une application $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbf{C}$ vérifiant

(i) $\langle \xi + t\xi', \eta\rangle = \langle \xi,\eta\rangle + t\langle \xi',\eta\rangle$ pour tous $\xi,\xi',\eta\in\mathcal{H}$ et $t\in\mathbf{C}$;

(ii) $\langle \xi,\eta\rangle = \overline{\langle \eta,\xi\rangle}$ pour tous $\xi,\eta\in\mathcal{H}$;

(iii) $\langle \xi,\xi\rangle \geqslant 0$ pour tout $\xi\in\mathcal{H}$, avec égalité si et seulement si $\xi = 0$;

et qui est complet pour la norme $\|\cdot\|$ définie par ce produit scalaire ($\|\xi\| = \sqrt{\langle \xi,\xi\rangle}$).

Notation 1.1. — Nous noterons $\mathcal{E}_1$ ou $(\mathcal{E})_1$ la boule unité fermé d'un espace normé $(\mathcal{E},\|\cdot\|)$.

Rappelons que $\mathscr{B}(\mathcal{H})$, l'ensemble des opérateurs linéaires $\mathrm{T} : \mathcal{H}\to\mathcal{H}$ bornés, est une *algèbre de Banach*, c'est-à-dire un espace de Banach muni d'une structure d'algèbre telle que $\|xy\| \leqslant \|x\|\cdot\|y\|$.

Remarque 1.2. — Tout produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$|\langle \xi,\eta\rangle| \leqslant \|\xi\|\cdot\|\eta\| \qquad \text{pour tous } \xi,\eta\in\mathcal{H}.$$

En outre, cette inégalité devient une égalité si et seulement si ξ et η sont colinéaires.

Remarque 1.3. — Tout espace de Hilbert est dual à lui-même grâce au *théorème de représentation de Riesz*, qui affirme que toute fonctionnelle[1] bornée $\varphi : \mathcal{H}\to\mathbf{C}$ est de la forme

$$\varphi(\xi) = \langle \xi,\eta\rangle \qquad \text{pour tous } \xi\in\mathcal{H},$$

pour un certain $\eta\in\mathcal{H}$ (indépendant de ξ), et en outre $\|\varphi\| = \|\eta\|_{\mathcal{H}}$. En particulier, $\mathcal{H}$ est réflexif[2].

1. Nous écrivons souvent « fonctionelle » pour « fonctionelle linéaire ».

2. Pour être tout à fait rigoureux, notons que l'application $\eta\mapsto\langle\cdot,\eta\rangle$ est antilinéaire, de sorte qu'elle fournit un isomorphisme entre $\mathcal{H}^*$ et $\overline{\mathcal{H}}$, l'espace conjugué de $\mathcal{H}$.

Remarque 1.4. — Tout ensemble fermé, convexe et non vide $\mathrm{C} \subseteq \mathcal{H}$ a un unique élément de norme minimale. En particulier, cela permet de définir une *projection sur le point le plus proche*, c'est-à-dire une application $\mathrm{P_C} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ à valeurs dans C, idempotente et telle que le minimum de $\| \xi - \eta \|$ pour $\eta \in \mathrm{C}$ est atteint en $\eta = \mathrm{P_C}(\xi)$. Si C est en outre un sous-espace vectoriel, cette projection est même une application linéaire bornée.

Adjoints L'autodualité d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ implique que pour toute application linéaire bornée $\mathrm{T} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, il existe une unique application linéaire bornée $\mathrm{T}^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ (appelée *adjoint* de T) telle que

$$\langle \xi, \mathrm{T}^*\eta \rangle = \langle \mathrm{T}\xi, \eta \rangle \qquad \text{pour tous } \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

Un opérateur $\mathrm{T} \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ égal à son adjoint est appelé *hermitien* (en anglais, *self-adjoint*).

Exercice 1.5. — (i) Montrer que la projection $\mathrm{P}_{\mathcal{K}}$ sur un sous-espace fermé $\mathcal{K}$ est hermitienne, que $\| \mathrm{P}_{\mathcal{K}} \| = 1$ (sauf si $\mathcal{K} = \{0\}$) et que $\mathrm{Id} - \mathrm{P}_{\mathcal{K}} = \mathrm{P}_{\mathcal{K}^\perp}$, où $\mathcal{K}^\perp = \{\eta \in \mathcal{H} \mid \forall \xi \in \mathcal{K},\ \langle \xi, \eta \rangle = 0\}$ est le *complément orthogonal* de $\mathcal{K}$.

(ii) Montrer qu'il existe une unique projection hermitienne $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dont l'image est $\mathcal{K}$.

Bases Rappelons que toute partie orthonormale $\{\xi_i\}_{i \in \mathrm{I}_0} \subset \mathcal{H}$ (c'est-à-dire vérifiant $\langle \xi_i, \xi_j \rangle = \delta_{ij}$ pour tous $i, j \in \mathrm{I}_0$) se prolonge en une base orthonormale $\{\xi_i\}_{i \in \mathrm{I}}$ (c'est-à-dire qu'en outre tout $\xi \in \mathcal{H}$ s'écrit comme $\xi = \sum_{i \in \mathrm{I}} \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i$).

Sommes directes Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert. Leur *somme directe* $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ est muni d'une structure d'espace de Hilbert via le produit scalaire défini par

$$\langle \xi_1 \oplus \xi_2, \eta_1 \oplus \eta_2 \rangle = \langle \xi_1, \eta_1 \rangle_1 + \langle \xi_2, \eta_2 \rangle_2.$$

Il est alors aisé de voir que la norme qui s'en déduit vérifie $\| \xi_1 \oplus \xi_2 \|^2 = \| \xi_1 \|_1^2 + \| \xi_2 \|_2^2$.

Nous noterons $\mathcal{H}^{\oplus n}$ la somme directe de n copies de $\mathcal{H}$. Remarquons alors que nous pouvons identifier $\mathscr{B}(\mathcal{H}^{\oplus n})$ à $\mathrm{M}_n \otimes \mathscr{B}(\mathcal{H})$, l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathscr{B}(\mathcal{H})$.

1.2 Algèbres d'opérateurs

Considérons les trois topologies suivantes dont peut être muni $\mathscr{B}(\mathcal{H})$, l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de $\mathcal{H}$.

1. La *topologie de la norme* ou *topologie uniforme* est la topologie usuelle de la norme opérateur définie par

$$\| \mathrm{T} \| = \sup \{ \| \mathrm{T}\xi \| \mid \xi \in \mathcal{H},\ \| \xi \| \leqslant 1 \} = \sup \{ |\langle \mathrm{T}\xi, \eta \rangle| \mid \xi, \eta \in \mathcal{H},\ \| \xi \|, \| \eta \| \leqslant 1 \},$$

cette dernière égalité étant due à l'autodualité de $\mathcal{H}$.

2. La *topologie forte* (*strong operator topology* en anglais) ou *topologie de la convergence simple forte* est la topologie induite par la famille de semi-normes $\| \cdot \xi \|$ ($\xi \in \mathcal{H}$) : autrement dit,

une suite généralisée $\{\mathrm{T}_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}} \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{H})$ converge vers $\mathrm{T} \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ pour la topologie forte si et seulement si $\|(\mathrm{T}_\alpha - \mathrm{T})\xi\|$ converge vers zéro pour tout $\xi \in \mathcal{H}$.

3. La *topologie faible*[3] (*weak operator topology* en anglais) ou *topologie de la convergence simple faible* est la topologie induite par l'ensemble des fonctionnelles $\langle\cdot\xi,\eta\rangle$ $(\xi,\eta \in \mathcal{H})$: autrement dit, une suite généralisée $\{\mathrm{T}_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}} \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{H})$ converge vers $\mathrm{T} \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ pour la topologie faible si et seulement si $\langle\mathrm{T}_\alpha\xi,\eta\rangle$ converge vers $\langle\mathrm{T}\xi,\eta\rangle$ pour tous $\xi,\eta \in \mathcal{H}$.

Remarque 1.6. — Chacune de ces topologies munit $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ d'une structure d'espace vectoriel topologique séparé et localement convexe. La topologie de la norme est même compatible avec la structure d'algèbre et avec l'adjonction. La situation est plus subtile avec les topologies forte et faible, comme le montrent les trois exercices suivants.

Exercice 1.7. — Observer que l'application $\mathrm{T} \mapsto \mathrm{T}^*$ est continue pour la topologie faible (et pour la topologie de la norme). Montrer en revanche qu'elle ne l'est pas pour la topologie forte. *Indication.* Considérer l'opérateur de décalage à droite $\mathrm{S} : \ell^2(\mathbf{N}) \to \ell^2(\mathbf{N})$ défini par $\mathrm{S}\left((x_i)_{i\in\mathbf{N}}\right) = (0, x_0, x_1, x_2, \dots)$.

Exercice 1.8. — (i) Soit W un voisinage fort de zéro. Montrer que pour tous $\xi,\eta \in \mathcal{H}$ non nuls, il existe $\mathrm{T},\mathrm{S} \in \mathrm{W}$ tels que $|\langle\mathrm{TS}\xi,\eta\rangle| > 1$. *Indication.* Montrer qu'il existe $z \in \mathcal{H}$ tel que

$$\sup_{\mathrm{T}\in\mathrm{W}} \|\mathrm{T}z\| = \infty.$$

(ii) En conclure que la multiplication n'est pas continue lorsque $\mathscr{B}(\mathcal{H})\times\mathscr{B}(\mathcal{H})$ est muni du produit des topologies fortes et $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ est muni de la topologie faible. *A fortiori*, ni la topologie faible ni la topologie forte ne sont compatibles avec la structure d'algèbre de $\mathscr{B}(\mathcal{H})$.

L'exercice suivant montre que l'obstruction à la continuité de la multiplication pour les topologies faible et forte réside bien dans le fait que les voisinages de ces topologies ne sont pas bornés.

Exercice 1.9. — Notons $\mathscr{B}(\mathcal{H})_1$ la boule unité (pour la norme opérateur) de $\mathscr{B}(\mathcal{H})$.

(i) Montrer que la multiplication $\mathscr{B}(\mathcal{H})_1 \times \mathscr{B}(\mathcal{H}) \to \mathscr{B}(\mathcal{H}) : (\mathrm{T},\mathrm{S}) \mapsto \mathrm{TS}$ est continue lorsque la source $\mathscr{B}(\mathcal{H})_1 \times \mathscr{B}(\mathcal{H})$ est munie de la topologie produit des topologies faible sur $\mathscr{B}(\mathcal{H})_1$ et forte sur $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ et que le but $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ est muni de la topologie faible.

(ii) Montrer de même que $\mathscr{B}(\mathcal{H})_1 \times \mathscr{B}(\mathcal{H}) \to \mathscr{B}(\mathcal{H}) : (\mathrm{T},\mathrm{S}) \mapsto \mathrm{TS}$ est continue pour la topologie forte.

Définition 1.10. — *Une* algèbre stellaire (concrète) *est une sous-algèbre de $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ qui est stable pour l'adjonction et fermée pour la topologie de la norme.*

Remarque 1.11. — Sous l'influence de l'anglais, il est fréquent d'entendre parler de *C*-algèbre* au lieu d'algèbre stellaire (cf. *infra* pour des explications sur la terminologie).

Proposition 1.12. — *Pour tout $\mathrm{T} \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, nous avons $\|\mathrm{T}^*\mathrm{T}\| = \|\mathrm{T}\|^2$.*

3. On prendra garde à ne pas confondre cette topologie avec la topologie faible obtenue lorsque $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ est considéré comme un espace de Banach. La terminologie est quelque peu malheureuse mais il ne devrait pas en résulter de grande confusion ; la topologie faible sera de toute façon peu utilisée.

Démonstration. — Nous avons d'abord

$$\| \mathrm{T}^* \| = \sup_{\xi,\eta \in \mathcal{H}_1} |\langle \mathrm{T}^*\xi, \eta\rangle| = \sup_{\xi,\eta \in \mathcal{H}_1} |\langle \xi, \mathrm{T}\eta\rangle| = \| \mathrm{T} \|.$$

Comme $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ est une algèbre de Banach, nous en déduisons

$$\| \mathrm{T}^*\mathrm{T} \| \leqslant \| \mathrm{T}^* \| \cdot \| \mathrm{T} \| = \| \mathrm{T} \|^2.$$

D'un autre côté, nous avons

$$\begin{aligned} \| \mathrm{T} \|^2 &= \left(\sup_{\xi \in \mathcal{H}_1} \langle \mathrm{T}\xi, \mathrm{T}\xi \rangle^{\frac{1}{2}} \right)^2 = \sup_{\xi \in \mathcal{H}_1} \langle \mathrm{T}\xi, \mathrm{T}\xi \rangle \\ &= \sup_{\xi \in \mathcal{H}_1} \langle \mathrm{T}^*\mathrm{T}\xi, \xi \rangle \leqslant \sup_{\xi \in \mathcal{H}_1} \| \mathrm{T}^*\mathrm{T}\xi \| \cdot \| \xi \| \\ &\leqslant \| \mathrm{T}^*\mathrm{T} \|. \end{aligned}$$

■

Définition 1.13. — *Une* algèbre stellaire (abstraite) *est une algèbre de Banach involutive*[4] $\mathscr{A}$ *telle que* $\| \mathrm{T}^*\mathrm{T} \| = \| \mathrm{T} \|^2$ *pour tout* $\mathrm{T} \in \mathscr{A}$.

Remarque 1.14. — Nos algèbres stellaires ne sont pas nécessairement unifères (c'est-à-dire qu'elles n'ont pas nécessairement d'élément unité), pas plus que nos algèbres de Banach.

Théorème 1.15 (Gelfand–Naimark–Segal). — *Toute algèbre stellaire abstraite est isomorphe, en tant qu'algèbre de Banach involutive, à une algèbre stellaire concrète.*

Ce théorème sera démontré plus tard dans ce cours.

Définition 1.16. — *Une* algèbre de von Neumann (concrète) *est une sous-algèbre involutive* unifère *de* $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ *qui est fermée pour la topologie faible.*

Remarque 1.17. — En particulier, toute algèbre de von Neumann est une algèbre stellaire (concrète) unifère.

Morphismes Clarifions la notion de morphisme, qui n'était qu'implicite jusqu'à présent. Soit une application $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ entre deux algèbres. Nous dirons que φ est :

(i) un *morphisme (d'algèbres)* si φ est linéaire et $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ pour tous $x, y \in \mathscr{A}$;

(ii) un *morphisme (d'algèbres) unifère* si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont unifères et si φ est un morphisme d'algèbres tel que $\varphi(\mathbb{1}_{\mathscr{A}}) = \mathbb{1}_{\mathscr{B}}$;

(iii) un *morphisme d'algèbres involutives* si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont des algèbres involutives et si φ est un morphisme d'algèbres tel que $\varphi(x^*) = \varphi(x)^*$ pour tout $x \in \mathscr{A}$;

4. C'est-à-dire munie d'une involution isométrique $x \mapsto x^*$ telle que $(x + \lambda y)^* = x^* + \overline{\lambda} y^*$ et $(xy)^* = y^* x^*$ pour tous $x, y \in \mathscr{A}$ et $\lambda \in \mathbf{C}$.

(iv) un *morphisme d'algèbres stellaires* si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont des algèbres stellaires et si φ est un morphisme d'algèbres involutives.

Nous n'exigeons *a priori* pas de continuité.

Terminologie Les algèbres de von Neumann ont été étudiées pour la première fois par Murray et von Neumann dans les années trente. Elles étaient alors appelées « anneaux d'opérateurs». Elles sont parfois également appelées W*-algèbres. C'est J. Dixmier qui a ensuite renommer ces objets « algèbres de von Neumann », sous la suggestion de Dieudonné.

Voici quelques explicatons possibles pour le nom de « C*-algèbres» pour les algèbres stellaires.

1. Une raison naïve serait qu'elles sont fermées, *closed* en anglais, ce qui serait cohérent avec le nom de W*-algèbres pour les algèbres de von Neumann (*weak*).
2. Ryszard Nest [5] estime que c'est dû à la raison suivante :
   - A*-algèbres = algèbres de Banach involutives, objets fondamentaux ;
   - B*-algèbres = algèbres involutives d'opérateurs bornés (nos algèbres stellaires concrètes) ;
   - Tadaa ! C*-algèbres.
3. Toutefois, Gert Pedersen [6] estime que c'est dû au fait qu'elles généralisent les algèbres $\mathscr{C}(\mathrm{X})$ des fonctions continues (et il reproche à Segal de les avoir ainsi appelées).

N. Bourbaki et, parfois, Alain Connes utilisent quant à eux la terminologie beaucoup plus élégante d'*algèbres stellaires*.

Théorème du bicommutant Le théorème de ce paragraphe donne une caractérisation algébrique des algèbres de von Neumann.

Définition 1.18. — *Soit* X *une partie de* $\mathscr{B}(\mathcal{H})$. *Nous définissons le* commutant *de* X *comme étant* $\mathrm{X}' = \{\mathrm{T} \in \mathscr{B}(\mathcal{H}) \mid \forall \mathrm{S} \in \mathrm{X}, \mathrm{TS} = \mathrm{ST}\}$. *Le* bicommutant X'' *est défini comme étant* $(\mathrm{X}')'$.

Remarque 1.19. — Dans le cas oû X serait contenue dans une autre partie Y de $\mathscr{B}(\mathcal{H})$, nous considérons par défaut le commutant au sein de l'ensemble de *tous* les opérateurs bornés $\mathscr{B}(\mathcal{H})$, sauf mention du contraire.

Théorème 1.20 (von Neumann, 1929). — *Soit* $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{H})$ *une sous-algèbre involutive (unifère). Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathscr{A} = \mathscr{A}''$;

(ii) $\mathscr{A}$ *est fermée pour la topologie faible ;*

(iii) $\mathscr{A}$ *est fermée pour la topologie forte.*

5. Le directeur de thèse de l'auteur.
6. Le directeur de thèse de Ryszard Nest.

Démonstration. — Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) et (ii) $\Rightarrow$ (iii) sont claires. Supposons donc que $\mathscr{A}$ est fermée pour la topologie forte et soit $\mathrm{T} \in \mathscr{A}''$. Il nous suffit de trouver une suite généralisée T_i d'opérateurs dans $\mathscr{A}$ qui converge vers T pour la topologie forte. De façon équivalente, nous devons trouver, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout ensemble fini $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \subseteq \mathcal{H}$, un opérateur $\mathrm{S} \in \mathscr{A}$ tel que

$$\| (\mathrm{T} - \mathrm{S})\xi_k \| < \varepsilon \qquad \text{pour tout } k = 1, \ldots, n.$$

Notons $\mathcal{K} = \mathcal{H}^{\oplus n} = \mathcal{H} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}$ et $\xi = (\xi_k) \in \mathcal{K}$. Considérons la représentation diagonale $\pi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathcal{K}) : \mathrm{T} \mapsto \mathbb{1}_n \otimes \mathrm{T}$, c'est-à-dire

$$\pi(\mathrm{T}).(\eta_k) = (\mathrm{T}\eta_k) \qquad \text{pour tout } (\eta_k) \in \mathcal{K}.$$

Soit maintenant $\mathcal{K}_0 = \overline{\pi(\mathscr{A}).\xi}$. C'est un sous-espace fermé de $\mathcal{K}$ tel que $\overline{\pi(\mathscr{A}).\mathcal{K}_0} = \mathcal{K}_0$. Il s'en suit que la projection $\mathrm{P}_{\mathcal{K}_0}$ de $\mathcal{K}$ sur $\mathcal{K}_0$ appartient au commutant de $\mathscr{A}$ (dans $\mathscr{B}(\mathcal{K})$), c'est-à-dire

$$\mathrm{P}_{\mathcal{K}_0} \in (\mathbb{1}_n \otimes \mathscr{A})' \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{K}).$$

En effet, puisque $\mathscr{A}$ est une algèbre involutive, le complément $\mathcal{K}_0^{\perp}$ est *réduit* pour $\mathscr{A}$ dans le sens oû $\mathscr{A}.\mathcal{K}_0^{\perp} \subseteq \mathcal{K}_0^{\perp}$.

Exercice 1.21. — Montrer que $(\mathbb{1}_n \otimes \mathscr{A})' \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{K})$ est égal à l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathscr{A}' \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{H})$.

En vertu de cet exercice, $\pi(\mathrm{T}) = \mathbb{1}_n \otimes \mathrm{T} \in (\mathbb{1}_n \otimes \mathscr{A})''$, de sorte que

$$\mathrm{P}_{\mathcal{K}_0}(\pi(\mathrm{T}).\xi) = \pi(\mathrm{T})(\mathrm{P}_{\mathcal{K}_0}.\xi) = \pi(\mathrm{T}).\xi.$$

Mais cela signifie justement que $\pi(\mathrm{T}).\xi \in \mathcal{K}_0 = \overline{\pi(\mathscr{A}).\xi}$, ce qui achève la démonstration. ∎

Remarque 1.22. — Il est déjà instructif de reprendre la démonstration en supposant que $n = 1$.

Porisme 1.23. — Plus précisément, nous avons montré que toute sous-algèbre involutive $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{H})$ est dense dans son bicommutant $\mathscr{A}''$.

Exercice 1.24. — Soit $\mathrm{K} \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{H})$ un ensemble convexe. Montrer que ses adhérences pour les topolgies forte et faible coïncident. *Indication.* On peut appliquer la même « finesse matricielle » que dans la démonstration du théorème du bicommutant.

Sous-algèbre involutive abélienne maximale

Définition 1.25. — *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre involutive. Nous désignerons par l'acronyme* IAM *toute sous-algèbre involutive abélienne maximale (*MASA *en anglais, pour* maximal abelian self-adjoint*).*

Corollaire 1.26 (du théorème 1.20). — *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de von Neumann. Toute sous-algèbre IAM $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$ est fermée pour la topologie faible (autrement dit, est une (sous-)algèbre de von Neumann).*

Observation 1.27. — Soit $X \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{H})$ un sous-ensemble auto-adjoint (c'est-à-dire que $X = X^*$). Alors X' est une algèbre involutive égale à son bicommutant, donc est en fait une algèbre de von Neumann.

Démonstration (du corollaire). — Grâce à l'observation, $\mathscr{B}'' \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{H})$ est une algèbre de von Neumann, donc est fermée pour la topologie faible. Comme $\mathscr{B}$ est abélienne, nous avons $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{B}'$. Par définition, $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{B}'' \cap \mathscr{A}$; si cette inclusion était stricte, il existerait un $T \in \mathscr{B}'' \cap \mathscr{A}$ qui ne soit pas dans $\mathscr{B}$, mais qui devrait commuter avec tout opérateur de $\mathscr{B}$ puisque $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{B}'$. Ceci contredirait alors la maximalité de $\mathscr{B}$. Donc $\mathscr{B} = \mathscr{B}'' \cap \mathscr{A}$ est fermée pour la topologie faible, en tant qu'intersection de deux tels fermés. ■

Remarque 1.28. — Les sous-algèbres IAM sont vraiment importantes !

Chapitre 2

Le théorème de Gelfand–Naimark

2.1 Spectre

Exercice 2.1. — Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Banach *non unifère*. Considérons $\tilde{\mathscr{A}} = \mathscr{A} \oplus \mathbf{C} \cdot \mathbb{1}$ avec l'addition composante par composante et la multiplication définie par

$$(x \oplus t \cdot \mathbb{1}) \cdot (y \oplus s \cdot \mathbb{1}) = (xy + ty + sx) \oplus ts \cdot \mathbb{1}.$$

Vérifier que, munie de la norme définie par

$$\| x \oplus t \cdot \mathbb{1} \| = \sup_{y \in \mathscr{A}, \| y \| = 1} \| xy + ty \|,$$

$\tilde{\mathscr{A}}$ devient une algèbre de Banach unifère. Montrer en outre que si $\mathscr{A}$ était une algèbre stellaire, il en est de même de $\mathscr{A}$.

Indication. En fait, il faut voir $\tilde{\mathscr{A}}$ comme étant l'algèbre de Banach engendrée par $\mathscr{A}$ et $\mathbb{1}$ dans $\mathscr{B}(\mathscr{A})$ (où $\mathscr{A}$ est vue comme une sous-algèbre de $\mathscr{B}(\mathscr{A})$ via l'action par multiplication).

Notation 2.2. — Si $\mathscr{A}$ est déjà une algèbre unifère, nous poserons $\tilde{\mathscr{A}} = \mathscr{A}$.

Définition 2.3. — *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Banach. Le* spectre *d'un élément $x \in \mathscr{A}$ est l'ensemble*

$$\mathrm{sp}_{\mathscr{A}}(x) = \left\{ \lambda \in \mathbf{C} \;\middle|\; x - \lambda \mathbb{1} \textit{ n'est pas inversible dans } \tilde{\mathscr{A}} \right\}.$$

Nous noterons $\mathrm{sp}(x)$ s'il n'en résulte pas de confusion. Remarquons que, par « inversible », nous entendons « qui admet un inverse à gauche et *à droite ».*

Proposition 2.4. — *Le spectre $\mathrm{sp}(x)$ est un ensemble compact non vide.*

Démonstration. — Pour tout λ tel que $|\lambda| > \| x \|$, l'inverse est donné par

$$(x - \lambda \mathbb{1})^{-1} = -\lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda} \right)^n. \tag{2.1}$$

Par conséquent, le spectre est contenu dans la boule fermée de rayon $\| x \|$. En outre, l'ensemble des éléments inversibles dans $\mathscr{A}$ est ouvert : en effet, si w est inversible, alors pour tout y nous pouvons écrire $yw^{-1} = \mathbb{1} - (w-y)w^{-1}$, cette dernière expression étant inversible pour $\| w - y \|$ suffisamment petit, par le même argument qu'au début de cette démonstration. Ainsi, $\mathrm{sp}(x)$ est un ensemble compact.

Enfin, pour toute fonctionnelle continue non nulle φ sur $\mathscr{A}$, la fonction

$$\varphi_* : \lambda \mapsto \varphi\left((x - \lambda\mathbb{1})^{-1}\right)$$

est holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \mathrm{sp}(x)$. Grâce à l'égalité (2.1), cette fonction est bornée en dehors de la boule fermée de rayon $\| x \|$; si le spectre était vide, elle serait donc identiquement nulle, par le théorème de Liouville. Mais alors, par le théorème de Hahn–Banach, l'argument $x - \lambda\mathbb{1}$ serait nul pour tout lambda, ce qui est absurde. ∎

Exercice 2.5. — (i) Observer que $\lambda \in \mathrm{sp}(x)$ si et seulement si $\tilde{\mathscr{A}} \cdot (x - \lambda\mathbb{1})$ ou $(x - \lambda\mathbb{1})\tilde{\mathscr{A}}$ sont des idéaux *propres* de $\tilde{\mathscr{A}}$.

(ii) Soit $p \in \mathbf{C}[\mathrm{X}]$ un polynôme à une variable, $p(\mathrm{X}) = t_n\mathrm{X}^n + \cdots + t_0$. Pour $x \in \mathscr{A}$, notons $p(x) = t_n x^n + \cdots + t_0\mathbb{1} \in \tilde{\mathscr{A}}$. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{sp}(x)$, alors $p(\lambda) \in \mathrm{sp}(p(x))$.

Définition 2.6. — *Le* rayon spectral *d'un élément $x \in \mathscr{A}$ est*

$$|\mathrm{sp}|(x) = \sup_{\lambda \in \mathrm{sp}(x)} |\lambda|.$$

Théorème 2.7 (formule du rayon spectral). — *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Banach et $x \in \mathscr{A}$. Alors $\left(\| x^n \|^{\frac{1}{n}}\right)_n$ est une suite convergente et*

$$|\mathrm{sp}|(x) = \lim_{n\to\infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}}.$$

En particulier, $|\mathrm{sp}|(x) \leqslant \| x \|$.

Nous omettons la démonstration de cette formule, qu'on peut trouver par exemple dans le livre de Rudin ou celui de Kadison et Ringrose.

Définition 2.8. — *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre stellaire. Un élément $x \in \mathscr{A}$ est dit*

(i) hermitien *(en anglais, selft-adjoint) si $x = x^*$,*

(ii) normal *si $x^*x = xx^*$,*

(iii) et unitaire *si $x^*x = xx^* = \mathbb{1}$.*

Lemme 2.9. — *Si $x \in \mathscr{A}$ est normal, alors $\| x \| = |\mathrm{sp}|(x)$.*

Démonstration. — Supposons d'abord que x est hermitien. Alors nous avons $\| x^2 \| = \| x^*x \| = \| x \|^2$ et donc, par récurrence,

$$|\mathrm{sp}|(x) = \lim_{n\to\infty} \| x^{2^n} \|^{2^{-n}} = \| x \|.$$

Si x est normal, alors nous avons

$$\begin{aligned}
(|\mathrm{sp}|(x))^2 &\leqslant \| x \|^2 = \| x^* x \| = \lim_{n\to\infty} \| (x^* x)^n \|^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \| (x^*)^n x^n \|^{\frac{1}{n}} \qquad \text{(car } x \text{ est normal)} \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} \| (x^*)^n \|^{\frac{1}{n}} \cdot \| x^n \|^{\frac{1}{n}} \\
&= (|\mathrm{sp}|(x))^2
\end{aligned}$$

■

2.2 Un cas particulier du théorème de Gelfand–Naimark

Cette partie est consacrée à la démonstration du théorème suivant.

Théorème 2.10 (Gelfand–Naimark, cas particulier). — *Soit $x \in \mathscr{A}$ un élément normal dans une algèbre stellaire $\mathscr{A}$. Alors l'application*

$$\mathbf{C}[\mathrm{X}] \to \mathscr{A} : p \mapsto p(x)$$

induit une isométrie d'algèbre involutive de $\mathscr{C}_0(\mathrm{sp}(x)\backslash\{0\})$ sur la sous-algèbre stellaire engendrée par x.

Exercice 2.11. — Montrer que si $\mathscr{A}$ est unifère, cette isométrie se prolonge en une isométrie de $\mathscr{C}(\mathrm{sp}(x))$ sur la sous-algèbre stellaire engendrée par x et $\mathbb{1}$.

Définition 2.12. — *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Banach commutative. Le* spectre *$\hat{\mathscr{A}}$ de $\mathscr{A}$ est l'ensemble des fonctionnelles linéaires bornées non nulles $\varphi : \mathscr{A} \to \mathbf{C}$ telles que $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ pour tous $x, y \in \mathscr{A}$. Autrement dit, $\hat{\mathscr{A}}$ est l'ensemble des homomorphismes complexes* non nuls*. En particulier, si $\mathscr{A}$ est unifère, alors $\varphi(\mathbb{1}) = 1$ (et, si $\mathscr{A}$ n'est pas unifère, nous pouvons prolonger φ à $\tilde{\mathscr{A}}$ en posant $\varphi(\mathbb{1}) = 1$).*

Remarque 2.13. — Nous n'exigeons pas *a priori* que ces morphismes respectent l'adjonction.

Observation 2.14. — Soit $x \in \mathscr{A}_1$, non nul. Alors $\| x^n \| \leqslant \| x \|^n \leqslant 1$ pour tous $n \in \mathbf{N}$, d'oû nous déduisons $|\varphi(x)| \leqslant 1$. Ainsi, $\hat{\mathscr{A}} \cup \{0\}$ est un espace compact pour la topologie faible-$*$, donc $\hat{\mathscr{A}}$ est lui-même localement compact.

L'idée derrière le théorème de Gelfand–Naimark est d'identifier $\mathrm{sp}(x) \setminus \{0\}$ avec $\hat{\mathscr{B}}$, oû $\mathscr{B}$ est la sous-algèbre stellaire engendrée par x.

Lemme 2.15. — *Tout idéal (bilatère) maximal dans une algèbre de Banach unifère $\mathscr{A}$ est fermé, et tout idéal (bilatère) propre est contenu dans un idéal maximal.*

Bien entendu, « idéal maximal » signifie « idéal *propre* maximal ».

Démonstration. — Puisque l'ensemble des éléments inversibles dans $\mathscr{A}$ est ouvert, l'adhérence d'un idéal propre est encore un idéal propre. ■

Théorème 2.16 (Gelfand–Mazur). — *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Banach unifère telle que tout élément non nul est inversible. Alors $\mathscr{A} \simeq \mathbf{C}$.*

Démonstration. — Soient x un élément de $\mathscr{A}$ et λ un élément du spectre de x (dont on sait qu'il est non vide grâce à la proposition 2.4). L'élément $x - \lambda\mathbb{1}$ étant non inversible, il doit être nul par hypothèse. Donc $x = \lambda\mathbb{1}$, ce qui montre que $\mathscr{A} = \mathbf{C}\mathbb{1}$. ■

Soit $\mathscr{B} = \langle x \rangle$ la sous-algèbre stellaire engendrée par $x \in \mathscr{A}$. Observons que $\mathscr{B}$ est commutative, puisque x est normal. Pour tout $\varphi \in \hat{\mathscr{B}}$, nous avons $\varphi(x - \varphi(x)\mathbb{1}) = 0$, donc $x - \varphi(x)\mathbb{1}$ n'est pas inversible (puisque φ est unifère). Nous pouvons en conclure que l'application $\Lambda : \varphi \mapsto \varphi(x)$ envoie $\hat{\mathscr{B}}$ dans $\mathrm{sp}(x) \setminus \{0\}$.

Lemme 2.17. — *Soient $\mathscr{A}$ une algèbre de Banach commutative et $x \in \mathscr{A}$. Si le spectre de x possède un élément λ non nul, alors il existe $\varphi \in \hat{\mathscr{A}}$ tel que $\varphi(x) = \lambda$.*

Démonstration. — Grâce au lemme 2.15, l'élément $x - \lambda\mathbb{1}$ est contenu dans un certain idéal maximal $\mathscr{M} \subset \tilde{\mathscr{A}}$. Grâce au théorème de Gelfand–Mazur, $\tilde{\mathscr{A}}/_{\mathscr{M}} \simeq \mathbf{C}$, la projection sur ce quotient fournit donc la fonctionnelle désirée. ■

Nous avons ainsi montré que l'application $\Lambda : \hat{\mathscr{B}} \to \mathrm{sp}(x) \setminus \{0\} : \varphi \mapsto \varphi(x)$ est surjective.

Définition 2.18. — *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Banach* commutative*. La* tranformation de Gelfand *est l'application*

$$\mathscr{A} \to \mathscr{C}_0(\hat{\mathscr{A}}) : x \mapsto \hat{x}$$

définie par $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$.

Exercice 2.19. — Montrer que la transformation de Gelfand est un homomorphisme d'algèbres de norme au plus 1.

Nous avons maintenant les outils nécessaires pour démontrer un cas particulir du théorème de Gelfand–Naimark.

Démonstration (du théorème 2.10). — En tirant en arrière l'application Λ, nous obtenons une injection $\Lambda^* : \mathscr{C}_0(\mathrm{sp}(x) \setminus \{0\}) \to \mathscr{C}_0(\hat{\mathscr{B}})$. Considérons dès lors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{A} & \\
 & \rotatebox{90}{$\subseteq$} & \\
 & \mathscr{B} \arrow[dr, "y \mapsto \hat{y}"] & \\
\mathrm{Pol}_0(\mathrm{sp}(x) \setminus \{0\}) \arrow[ur, "p \mapsto p(x)"] \arrow[dr, hook, "\iota"'] & & \mathscr{C}_0(\hat{\mathscr{B}}) \\
 & \mathscr{C}_0(\mathrm{sp}(x) \setminus \{0\}), \arrow[uu, dotted] \arrow[ur, hook, "\Lambda^*"'] &
\end{tikzcd}$$

où $\mathrm{Pol}_0(\mathrm{sp}(x) \setminus \{0\})$ est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}_0(\mathrm{sp}(x) \setminus \{0\})$ formé des restrictions des polynômes et de leur conjugué. Par le théorème de Stone–Weierstrass, il s'agit d'un sous-espace dense.

Il est aisé de voir que l'application $p \mapsto p(x)$ est un morphisme d'algèbres involutives qui accroît la norme : en effet, grâce à la formule du rayon spectral et à l'exercice 2.5,

$$\| p(x) \| = \sup_{\lambda \in \mathrm{sp}(p(x))} |\lambda| \geqslant \sup_{\lambda \in p(\mathrm{sp}(x))} |\lambda| = \| p \|_{\mathscr{C}_0}.$$

D'un autre côté, tout élément $y \in \mathscr{B}$ est normal (puisque x l'est) ; par conséquent, d'après les lemmes 2.9 et 2.17,

$$\| \hat{y} \| = \sup_{\varphi \in \hat{\mathscr{B}}} |\hat{y}(\varphi)| = \sup_{\varphi \in \hat{\mathscr{B}}} |\varphi(y)| = \sup_{\lambda \in \mathrm{sp}(y)} |\lambda| = \| y \|,$$

donc la transformation de Gelfand est isométrique.

Par densité et grâce à la commutativité du diagramme ci-dessus, l'application $p \mapsto p(x)$ se prolonge comme désirée. ■

2.3 Calcul fonctionnel continu

Grâce au cas particulier que nous venons de montrer, nous pouvons définir la notion suivante.

Définition 2.20. — *Soit $x \in \mathscr{A}$ un élément normal d'une algèbre stellaire $\mathscr{A}$. Pour tout $f \in \mathrm{sp}(x)$, nous notons par $f(x) \in \tilde{\mathscr{A}}$ l'unique élément de $\mathscr{B} = \langle x, \mathbb{1} \rangle$ tel que $\widehat{f(x)} = f$. Remarquons que si $0 \in \mathrm{sp}(x)$ et que $f(0) = 0$, alors $f(x) \in \langle x \rangle$.*

Exercice 2.21. — Soient $\mathscr{A}$ une algèbre stellaire et $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ une sous-algèbre stellaire. Si $x \in \mathscr{B}$ est un élément normal, alors $\mathrm{sp}_{\mathscr{B}}(x) = \mathrm{sp}_{\mathscr{A}}(x)$.

Exercice 2.22 (*théorème de l'application spectrale*). — Soient $\mathscr{A}$ une algèbre stellaire, $x \in \mathscr{A}$ un élément normal et $f \in \mathscr{C}(\mathrm{sp}(x))$. Alors nous avons l'égalité $\mathrm{sp}(f(x)) = f(\mathrm{sp}(x))$.

Proposition 2.23. — *Soient $\mathscr{A}$ une algèbre stellaire et $u \in \mathscr{A}$ un élément unitaire. Alors le spectre de u est contenu dans le cercle unité.*

Démonstration. — Comme $\| u \| = 1$, le spectre de u est contenu dans le disque unité. Par ailleurs, si $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$, alors il est aisé de voir que $\lambda^{-1} \in \mathrm{sp}(u^{-1}) = \mathrm{sp}(u^*) = \overline{\mathrm{sp}(u)}$, donc le spectre doit être contenu dans le cercle unité. ∎

Théorème 2.24 (Gelfand–Naimark, cas général). — *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre stellaire abélienne. Alors la transformation de Gelfand $x \mapsto \hat{x}$ est un isomorphisme d'algèbres involutives entre $\mathscr{A}$ et $\mathscr{C}_0(\hat{\mathscr{A}})$.*

Exercice 2.25. — Nous avons déjà montré dans la démonstration du cas particulier que $x \mapsto \hat{x}$ est isométrique, donc injective. Montrer que tout morphisme injectif d'algèbres stellaires est isométrique.

Exercice 2.26. — Observer que, pour tout élément x d'une algèbre involutive $\mathscr{A}$,

$$x = \frac{1}{2}(x + x^*) + i\frac{1}{2i}(x - x^*),$$

et en conclure que si $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ est une application linéaire entre algèbres stellaires telle que $\varphi(x)$ est hermitien dès que x l'est, alors $\varphi(x^*) = \varphi(x)^*$ pour tout $x \in \mathscr{A}$.

Démonstration (du théorème 2.24). — Grâce aux derniers paragraphes, il ne reste qu'à montrer que $x \mapsto \hat{x}$ préserve l'adjonction. Soit $x \in \mathscr{A}$ un élément hermitien. Alors

$$\exp(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \in \tilde{\mathscr{A}}$$

est unitaire, donc $\mathrm{sp}(\exp(ix))$ est contenu dans le cercle unité. Grâce au théorème de l'application spectrale, nous pouvons en conclure (par l'absurde), que le spectre de x est réel.

Ainsi, grâce au cas particulier du théorème de Gelfand–Naimark, nous avons, pour tout $\varphi \in \hat{\mathscr{A}}$,

$$\varphi(x) = \varphi\big|_{\mathscr{B}}(x) \in \mathrm{sp}(x) \subset \mathbf{R},$$

où $\mathscr{B}$ est à nouveau l'algèbre stellaire engendrée par x. Donc $\varphi(x)$ est réel (c'est-à-dire est un « nombre complexe hermitien »), et l'exercice précédent conclut. ∎

Chapitre 3

Positivité et théorème de Stinespring

3.1 Positivité et états

Soient $\mathscr{A}$ une algèbre stellaire et $x \in \mathscr{A}$. On voit par le calcul fonctionel que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) x est normal et $\mathrm{sp}(x) \subseteq [0, \infty)$;

(ii) il existe un élément hermitien $y \in \mathscr{A}$ tel que $x = y^2$.

Définition 3.1. — *Tout $x \in \mathscr{A}$ satisfaisant les deux conditions ci-dessus est appelé* positif. *Dans ce cas, on note $x \geqslant 0$. Nous désignons par $\mathscr{A}_+$ l'ensemble des éléments positifs de $\mathscr{A}$.*

Notons que $\mathscr{A}_+$ est un cône, i.e. est stable par addition et multiplication par des scalaires positifs. Pour tous $x, y \in \mathscr{A}_h$, l'ensemble des éléments hermitiens, nous définissons $x \leqslant y$ par $y - x \geqslant 0$. Cela définit un ordre sur $\mathscr{A}_h$.

Exercice 3.2. — (i) Soient $x, y \in \mathscr{A}$. Montrer que $\mathrm{sp}(xy) \setminus \{0\} = \mathrm{sp}(yx) \setminus \{0\}$ (on peut supposer que $\mathscr{A}$ est juste une algèbre complexe).

(ii) Soient $\mathscr{A}$ une algèbre stellaire et $x = x^* \in \mathscr{A}$. Montrer qu'il existe uniquement deux éléments $x_+, x_- \in \mathscr{A}_+$ satisfaisant $x = x_+ - x_-$ et $x_+ x_- = x_- x_+ = 0$ (il faut préciser exactement le terme « uniquement » — c'est une certaine condition de minimalité sur x_+ et x_-).

(iii) Soit $x \in \mathscr{A}$ et supposons qu'il existe $y \in \mathscr{A}$ tel que $x = y^* y$. Notons que x est hermitien. Soit $z = y\sqrt{x_-}$. Montrer, en considérant les produits $z^* z$ et $z z^*$, que $x_-^2 \in \mathscr{A}_+ \cap (-\mathscr{A}_+) = \{0\}$ et en inférer que x est positif.

Ce dernier exercice est un théorème dû à I. Segal.

Exercice 3.3. — Montrer qu'un élément $x \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ est positif au sens de la définition ci-dessus si et seulement si $\langle x\xi, \xi \rangle \geqslant 0$ pour tout $\xi \in \mathcal{H}$.

Définition 3.4. — *Soit $\varphi \colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ une application (linéaire) entre deux algèbres stellaires $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$. On dit que φ est une* application positive *si $\varphi(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on dit que*

φ *une* application n-positive *si l'application induite*

$$\varphi_{(n)} = \mathbb{1}_n \otimes \varphi \colon \mathrm{M}_n \otimes \mathscr{A} \to \mathrm{M}_n \otimes \mathscr{B} \tag{3.1}$$

est positive. Finalement, on dit que φ *est* complètement positive *si elle est* n*-positive pour tout* n.

Exercice 3.5. — (i) Observer qu'une application positive est en particulier hermitienne : $\varphi(x^*) = \varphi(x)^*$ pour tout $x \in \mathscr{A}$.

(ii) Montrer que pour $x \in \mathscr{A}_h$, nous avons $x \leqslant \|x\| \cdot \mathbb{1}$.

Définition 3.6. — *Une fonctionelle positive* $\varphi \colon \mathscr{A} \to \mathbf{C}$ *est appelée un* état *si* $\| \varphi \| = 1$.

Théorème 3.7. — *Soit* $\mathscr{A}$ *une algèbre stellaire unifère et* $\varphi \colon \mathscr{A} \to \mathbf{C}$ *une fonctionelle linéaire bornée. Alors* φ *est un état si et seulement si*

$$\|\varphi\| = \varphi(\mathbb{1}) = 1. \tag{3.2}$$

Démonstration. — Il est clair qu'un état est hermitien et, comme $x \leqslant \|x\|\mathbb{1}$ pour tout $x \in \mathscr{A}_h$, nous avons la condition nécessaire du théorème.

Par ailleurs, notons que, puisqu'un élément positif est en particulier normal, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $\mathscr{A}$ est abélienne et donc, grâce au théorème de Gelfand–Naimark, que $\mathscr{A} \simeq \mathscr{C}_0(\mathrm{X})$ pour un certain espace localement compact X.

Par le théorème de Riesz sur le dual de $\mathscr{C}_0(\mathrm{X})$, il existe une mesure μ sur X telle que

$$\varphi(x) = \int_{\mathrm{X}} \hat{x} \mathrm{d}\mu \qquad \text{pour tout } x \in \mathscr{A}, \tag{3.3}$$

avec $\|\varphi\| = |\mu|(\mathrm{X})$, où $|\mu|$ désigne la variation totale de μ, et $\mathrm{d}\mu = h \cdot \mathrm{d}|\mu|$ pour une fonction mesurable $h \colon \mathrm{X} \to \mathbf{T}$.

Alors les hypothèses du théorème deviennent $|\mu|(\mathrm{X}) = 1$ et $\int_{\mathrm{X}} h(x)\mathrm{d}|\mu|(x) = 1$; ce qui permet de conclure que $h = 1$ (presque partout), c'est-à-dire que $\mu = |\mu|$ est une mesure positive. ■

Remarque 3.8. — (i) On peut aussi utiliser une approximation de μ par des mesures à support fini, au lieu de la fonction h.

(ii) Il existe également une démonstration directe et plus élémentaire, en particulier qui ne repose pas sur le théorème de Gelfand–Naimark. Voir par exemple Kadinson–Ringrose, chapitre 4.

Corollaire 3.9 (prolongation des états). — *Soient* $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ *des algèbres stellaires et* φ *un état de* $\mathscr{A}$*. Alors* φ *se prolonge en un état de* $\mathscr{B}$.

Démonstration. — Dans un premier temps, nous pouvons si nécessaire prolonger φ à $\tilde{\mathscr{A}}$. En effet, si $\mathscr{A}$ n'est pas unifére, il existe un espace localement compact mais non compact X tel que $\mathscr{A} \simeq \mathscr{C}_0(\mathrm{X})$. En considérant son compactifié d'Alexandroff $\mathrm{X}^1 = \mathrm{X}\dot{\cup}\{*\}$, nous avons alors $\tilde{\mathrm{A}} \simeq$

$\mathscr{C}(\mathrm{X}^1)$. La mesure positive μ sur X correspondant à φ se prolonge à X^1 de manière évidente. Donc on obtient une prolongation $\tilde{\varphi}$ de φ à $\tilde{\mathscr{A}}$, donnée par

$$\tilde{\varphi}((x, \lambda \mathbb{1})) = \varphi(x) + \lambda. \tag{3.4}$$

Ensuite, le théorème précédent assure que toute prolongation de $\tilde{\varphi}$ à $\tilde{\mathscr{B}}$ de norme 1 (dont l'existence est assurée par le théorème de Hahn–Banach) est un état. ■

Exercice 3.10. — Nous verrons ci-dessous (sans utiliser ce corollaire) que pour toute fonctionelle hermitienne, la norme est donnée par sa restriction à $\mathscr{A}_h$. En utilisant ce fait comme « boîte noire », montrer qu'on peut prendre (3.4) comme définition de $\tilde{\varphi}$, sans référence au théorème de Gelfand–Naimark.

Corollaire 3.11 (identification de spectres). — *Soient $\mathscr{A}$ une algèbre stellaire abélienne et $\varphi \in \hat{\mathscr{A}}$. Alors φ est positif, en particulier hermitien.*

De plus, si $\mathscr{A} = \langle x \rangle$ est engendrée par un seul élément normal x, alors $\hat{\mathscr{A}} = \mathrm{sp}(x) \setminus \{0\}$.

Démonstration. — La première partie est claire puisque (la prolongation de) φ (à $\tilde{\mathscr{A}}$) est de norme $\|\varphi\| = 1 = \varphi(\mathbb{1})$.

Pour montrer la deuxième partie, observons que tout homomorphisme $\varphi \in \hat{\mathscr{A}}$ est déterminé entièrement par sa valeur en x, par conséquent l'application $\mathrm{ev}_x \colon \hat{\mathscr{A}} \to \mathrm{sp}(x)$ est injective et est donc un isomorphisme par ce qui précède. ■

Corollaire 3.12 (séparation des points). — *Soient $\mathscr{A}$ une algèbre stellaire et x un élément non nul de $\mathscr{A}$. Alors il existe un état φ sur $\mathscr{A}$ tel que $\varphi(x) \neq 0$.*

Démonstration. — On peut sans perte de généralité supposer que $x = x^*$, alors le corollaire est trivial par ce qui précède. ■

L'étude du dual d'une algèbre stellaire offre une théorie très belle avec des résultats détaillés. Voir par exemple Kadison–Ringrose, chapitre 4. Nous en donnons seulement un aperçu :

Exercice 3.13. — Soit $\mathscr{A}$ une algèbre stellaire et notons par $\mathscr{S}(\mathscr{A})$ le *cône des états* sur $\mathscr{A}$. Observer que c'est vraiment un cône et montrer que toute fonctionelle hermitienne φ de norme au plus 1 se trouve dans $\mathrm{conv}\{\mathscr{S}(\mathscr{A}), -\mathscr{S}(\mathscr{A})\}$.

Indication 1. En utilisant la même « boîte noire » qu'à l'exercice 3.10, l'exercice se déduit par le théorème de séparation des ensembles convexes de Hahn–Banach. Il faut faire attention au cas où $\mathscr{A}$ n'est pas unifère.

Indication 2. Comme autre possibilité de démonstration, remarquer d'abord que l'exercice est très facile pour toute sous-algèbre abélienne $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$. Puis nous pouvons recoller les solutions sur des sous-algèbres différentes à l'aide des applications linéaires

$$\mathscr{B}_1 \oplus \mathscr{B}_2 \to \mathscr{A} : (x, y) \mapsto x + y \tag{3.5}$$

et du théorème de l'application spectrale. Observons que, pour conclure, il faut utiliser une certaine propriété d'unicité de la décomposition de φ en une différence de fonctionelles positives. (Dans la première stratégie indiquée, on peut établir la même propriété d'unicité par une démonstration directe et élementaire.)

Corollaire 3.14. — *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre stellaire séparable. Alors il existe un état fidèle sur $\mathscr{A}$ (c'est-à-dire qui ne s'annule qu'en zéro).*

Démonstration. — Facile. ∎

3.2 Le théorème de dilatation de Stinespring

Commençons par un exercice facile.

Exercice 3.15. — Soit $\mathscr{A}$ une algèbre stellaire.

(i) Soient $x, y \in \mathscr{A}$. Montrer que, si x est positif, alors $0 \leqslant y^*xy \leqslant \| x \| y^*y$ et que, si $0 \leqslant x \leqslant y$ avec x et y inversibles, alors $y^{-1} \leqslant x^{-1}$.

(ii) Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathscr{A}$. Montrer que la matrice $(x_i^* x_j)_{i,j=1}^n \in \mathrm{Mat}_n(\mathscr{A})$ est positive, en tant qu'élément de $\mathrm{Mat}_n(\mathscr{A})$.

Exercice 3.16. — Montrer qu'une application positive entre algèbres stellaires est bornée.

Lemme 3.17. — *Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux algèbres stellaires et $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ une application complètement positive. Alors pour tout état ψ sur $\mathscr{B}$, la formule*

$$\left\langle \sum_{i=1}^m a_i \otimes b_i, \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\rangle_\varphi = \sum_{(i,j)=(1,1)}^{(m,n)} \psi(y_j^* \varphi(x_j^* a_i) b_i)$$

définit une forme sesquilinéaire semi-définie positive sur $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$.

Démonstration. — La sesquilinéarité est claire. Observons ensuite que

$$\left\langle \sum_{i=1}^m a_i \otimes b_i, \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\rangle_\varphi = (\psi \circ \mathrm{S}_n) \left(\begin{pmatrix} y_1^* & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & y_n^* \end{pmatrix} (\varphi(x_i^* a_j))_{(i,j)} \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_m \end{pmatrix} \right),$$

où $\mathrm{S}_n : \mathrm{Mat}_n(\mathscr{B}) \to \mathscr{B}$ est l'application linéaire additionnant les coefficients des matrices. Cette dernière étant positive, le lemme est démontré. ∎

Exercice 3.18. — (i) Trouver une caractérisation de la positivité d'une matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & \mathbb{1} \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Mat}_2(\mathscr{B})$ dépendant uniquement des éléments $a, b, c \in \mathscr{B}$.

(ii) Montrer que S_n est positive pour tout $n \in \mathbf{N}$. *Indication.* On peut remarquer qu'il suffit de considérer le cas $n = 2$ d'où le critère ci-dessus s'applique. Par ailleurs, on peut considérer la produit des matrices suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \cdots & \mathbb{1} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} (x_{ij}) \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

(iii) Montrer que tout état sur une algèbre stellaire est en fait complètement positif.

Théorème 3.19 (Stinespring). — *Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux algèbres unifères et $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ une application complètement positive (unifère). Alors il existe des espaces de Hilbert $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ munis de représentations fidèles d'algèbres stellaires $\pi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathcal{H})$ et $\rho : \mathscr{B} \to \mathscr{B}(\mathcal{K})$ et une application isométrique $\mathrm{V} : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ tels que*

$$\rho(\varphi(x)) = \mathrm{V}^*\pi(x)\mathrm{V} \qquad \textit{pour tout } x \in \mathscr{A}.$$

Démonstration. — Supposons pour simplifier que $\mathscr{B}$ est séparable et fixons un état fidèle ψ sur $\mathscr{B}$. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi$ la forme sesquilinéaire semi-définie positive sur $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ définie dans le lemme précédent et appelons $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert associé (c'est-à-dire la complétion du quotient de $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ par $\{x \mid \langle x, x \rangle_\varphi = 0\}$). Soit ensuite $\mathcal{K}$ l'espace de Hilbert obtenu de façon analogue en complétant $\mathscr{B} = \mathbf{C} \otimes \mathscr{B}$ par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{1}}$. Les représentations π et ρ sont alors induites par multiplication à gauche :

$$\begin{aligned} \pi(a).\left[\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\right]_{\mathcal{H}} &= \left[\sum_{i=1}^n a x_i \otimes y_i\right]_{\mathcal{H}} && \text{pour } a, x_i \in \mathscr{A} \text{ et } y_i \in \mathscr{B}, \\ \rho(b).[y]_{\mathcal{K}} &= [by]_{\mathcal{K}} && \text{pour } b, y \in \mathscr{B}. \end{aligned}$$

Exercice 3.20. — Vérifier que $\pi(a)$ et $\rho(b)$ ainsi définis induisent une application linéaire bornée sur $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ respectivement et que π et ρ sont bien en effet des morphismes unifères d'algèbres stellaires.

Finalement, définissons un plongement $\mathrm{V} : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ par $\mathrm{V}[y]_{\mathcal{K}} = [\mathbb{1} \otimes y]_{\mathcal{K}}$ pour $y \in \mathscr{B}$. Nous pouvons alors calculer l'adjoint de V comme suit :

$$\begin{aligned}
\left\langle y, \mathrm{V}^*\left(\sum_i a_i \otimes b_i\right)\right\rangle_{\mathcal{K}} &= \left\langle \mathrm{V}.y, \sum_i a_i \otimes b_i\right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \left\langle \mathbb{1} \otimes y, \sum_i a_i \otimes b_i\right\rangle_{\varphi} \\
&= \sum_i \psi(b_i^* \varphi(a_i^*) y) \\
&= \psi\left(\left(\sum_i \varphi(a_i) b_i\right)^* y\right) \\
&= \left\langle y, \sum_i \varphi(a_i) b_i\right\rangle_{\mathcal{K}}.
\end{aligned}$$

L'adjoint est donc donné par

$$\mathrm{V}^*\left(\sum_i a_i \otimes b_i\right) = \sum_i \varphi(a_i) b_i,$$

ce qui achève la démonstration. ■

Exercice 3.21. — Montrer que le théorème est encore vrai sans la simplification. *Indication.* Il existe une famille $\{\varphi_i\}$ (pas nécessairement dénombrable) d'états sur $\mathscr{B}$ telle que pour tout $x \in \mathscr{B} \setminus \{0\}$, on a $\varphi_i(x) \neq 0$ pour un certain i.

Corollaire 3.22 (Théorème 1.15). — *Toute algèbre stellaire (abstraite) admet une réprésentation fidèle comme algèbre stellaire concrète.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{B}_0$ une algèbre stellaire. On prend $\mathscr{A} = \mathbf{C}$ et $\mathscr{B} = \tilde{\mathscr{B}}_0$ dans le théorème précédent. ■

Dans ce contexte, la construction de $\mathcal{K}$ est appelée « construction GNS ». Il est déjà instructif de reprendre la démonstration de la théorème de Stinespring dans ce cas.

Chapitre 4

La boule unité

Théorème 4.1. — *La boule unité d'une algèbre de von Neumann $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{H})$ est compacte pour la topologie faible.*

Démonstration. — Similaire à la démonstration du théorème de Banach–Alaoglu–Bourbaki. ■

Exercice 4.2. — (i) Montrer que $(\mathscr{B}(\mathcal{H}))_1$ n'est pas compacte pour la topologie forte si $\mathcal{H}$ est de dimension infinie. En fait, il en est de même pour toute algèbre de von Neumann $\mathscr{A}$ avec $\dim_{\mathbf{C}} \mathscr{A} = \infty$. *Indication.* On peut montrer et appliquer le fait que la multiplication $\mathrm{B}_s \times \mathrm{B}_w \to \mathrm{B}_s$ n'est pas continue, où B_s est la boule unité munie de la topologie forte et B_w est la boule unité munie de la topologie faible. Alternativement, on peut utiliser la décomposition polaire du paragraphe suivant.

(ii) Montrer que les topologies forte et faible coïncident sur $\mathcal{U}(\mathcal{H})$. En particulier, le groupe unitaire sur un espace de Hilbert est un groupe topologique pour la topologie forte. Montrer qu'il admet une métrique complète.

(iii) Donner un exemple d'une suite $(u_n)_n$ d'unitaires u_n convergeant faiblement mais non fortement vers zéro.

4.1 Outils divers

Décomposition polaire

Exercice 4.3. — (i) Soit $\mathrm{T} \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ un opérateur borné inversible. Montrer que l'opérateur $\mathrm{U} = \mathrm{T}|\mathrm{T}|^{-1}$ est unitaire, où $|\mathrm{T}|$ est la « valeur absolue » de T : $|\mathrm{T}| = (\mathrm{T}^*\mathrm{T})^{\frac{1}{2}}$.

(ii) Montrer que, plus généralement, pour un opérateur borné quelconque T, l'application $\mathrm{V} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ définie par $\mathrm{V}(|\mathrm{T}|\xi) = \mathrm{T}\xi$, pour $\xi \in \mathcal{H}$ et $\mathrm{V}\eta = 0$ pour $\eta \in (|\mathrm{T}|(\mathcal{H}))^{\perp}$ se prolonge en un opérateur borné tel que

$$\mathrm{T} = \mathrm{V}|\mathrm{T}|. \tag{4.1}$$

Cette décomposition est appelée *décomposition polaire* de T. *Indication.* Calculer la norme de $\mathrm{V}(|\mathrm{T}|\xi)$.

Définition 4.4. — *Un élément x d'une algèbre stellaire $\mathscr{A}$ est appelé* isométrie partielle *si x^*x est une projection.*

Proposition 4.5. — *Un élément $x \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ est une isométrie partielle si et seulement s'il existe un sous-espace fermé $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ tel que $x\big|_{\mathcal{K}}$ est isométrique et $x\big|_{\mathcal{K}^\perp}$ est nulle.*

Démonstration. — Pour la condition nécessaire, posons $\mathcal{K} = p\mathcal{H}$, où $p = x^*x$. Il est alors aisé de calculer :

$$\|\, xp\xi \,\|^2 = \langle xp\xi, xp\xi \rangle = \left\langle p\xi, p^2\xi \right\rangle = \|\, p\xi \,\|^2,$$
$$\|\, xp^\perp\xi \,\|^2 = \left\langle xp^\perp\xi, xp^\perp\xi \right\rangle = \left\langle pp^\perp\xi, p^\perp\xi \right\rangle = 0$$

(rappelons que $p^\perp = \mathbb{1} - p$, donc $pp^\perp = 0$), ce qui montre bien que $x\big|_{\mathcal{K}}$ est isométrique et que $x\big|_{\mathcal{K}^\perp}$ est nulle.

Pour la condition suffisante, observons d'abord que $\mathcal{K}' = x(\mathcal{K})$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ (car $x\big|_{\mathcal{K}}$ est isométrique), donc $x\big|_{\mathcal{K}}$ est unitaire. Or $x^* = (x\big|_{\mathcal{K}})^{-1} \oplus 0$, ce qui montre que x^*x est la projection sur $\mathcal{K}$. ∎

Nous en déduisons le corollaire immédiat suivant.

Corollaire 4.6. — *Soit x un élément d'une algèbre stellaire $\mathscr{A}$.*
- *(i) x est une isométrie partielle si et seulement si x^* l'est aussi.*
- *(ii) Si x est une isométrie partielle, alors $x = xx^*x$ et $x^* = x^*xx^*$.*
- *(iii) Si x est une isométrie partielle, alors $x\big|_{x^*x(\mathcal{H})}$ est unitaire.*

Exercice 4.7. —
- (i) Soient $p, q \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ deux projections. Montrer que $p \leqslant q$ (en tant qu'opérateurs hermitiens) si et seulement si $p(\mathcal{H}) \subseteq q(\mathcal{H})$.
- (ii) Observer que l'opérateur V de l'exercice 4.3 est une isométrie partielle et montrer que c'est l'unique isométrie partielle minimale vérifiant l'égalité (4.1) (minimale pour la relation d'ordre sur les isométries partielles définie par « $x \leqslant y$ » si $x^*x \leqslant y^*y$). On dit aussi que x^*x est *la plus petite projection initiale.*
- (iii) Soit x un élément d'une algèbre de von Neumann $\mathscr{A}$. Montrer que l'isométrie partielle (canonique) x apparaissant dans la décomposition polaire de x appartient encore à $\mathscr{A}$. Observer que si $\mathscr{A}$ est juste une algèbre stellaire mais que x soit inversible, alors ce résultat est encore vrai.

Suprema hermitiens Le lemme suivant, d'apparence inoffensive, est en fait redoutablement utile.

Lemme 4.8. — *Soit $(x_i)_{i\in\mathrm{I}} \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{H})_h$ une suite généralisée croissante d'éléments hermitiens. Si cette suite est bornée supérieurement, alors il existe un opérateur hermitien x qui soit non seulement le supremum des x_i mais aussi la limite de la suite (x_i) pour la topologie forte.*

Remarque 4.9. — Les mêmes résultats sont bien entendu valides pour les suites généralisées décroissantes, *mutatis mutandis.*

Démonstration. — Tout d'abord, nous pouvons supposer que la suite généralisée des x_i est bornée, quittes à tronquer à partir d'un certain indice. Soit $\xi \in \mathcal{H}$. Observons que la suite généralisée $(\langle x_i\xi, \xi\rangle)_{i\in \mathrm{I}}$ est croissante, donc converge vers un nombre complexe, que nous appellerons $\alpha(\xi, \xi)$. Remarquons ensuite que, pour tous $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, la suite généralisée $(\| x_i\xi + \eta \|)_i$ converge. En effet, elle est de Cauchy :

$$\| (x_i\xi + \eta) - (x_j\xi + \eta) \|^2 = \langle (x_i - x_j)\xi, (x_i - x_j)\xi\rangle \leqslant \| x_i - x_j \| \langle (x_i - x_j)\xi, \xi\rangle,$$

or $\| x_i - x_j \|$ est borné et nous venons de montrer que $\langle (x_i - x_j)\xi, \xi\rangle$ est de Cauchy.

Rappelons ensuite que tout produit scalaire (hermitien) vérifie l'identité de polarisation

$$4\langle \xi, \eta\rangle = \| \xi + \eta \|^2 - \| \xi - \eta \|^2 + i\| \xi + i\eta \|^2 - i\| \xi - i\eta \|^2,$$

ce qui nous permet de définir $\alpha(\xi, \eta) = \lim_i \langle x_i\xi, \eta\rangle$ pour tous $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.

Clairement $\alpha(\cdot, \cdot)$ est une forme sesquilinéaire bornée sur $\mathcal{H}$, donc il existe, grâce au théorème de Riesz, un opérateur borné $x \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ tel que $\alpha(\xi, \eta) = \langle x\xi, \eta\rangle$ pour tous $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. En particulier, x_i converge vers x pour la topologie faible.

Par construction, x est hermitien et $x \geqslant x_i$ pour tout i. Par conséquent, pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, $\| \sqrt{x - x_i}\xi \|^2 = \langle (x - x_i)\xi, \xi\rangle$: nous pouvons donc déduire, de la convergence simple faible de x_i vers x, la convergence simple *forte* de $\sqrt{x - x_i}$ vers zéro. Grâce à la continuité pour la topologie forte de la multiplication *sur les ensembles bornés* (cf. exercice 1.9), nous en déduisons que $x - x_i$ converge vers zéro pour la topologie forte. Il est alors clair par construction que $x = \sup_i x_i$. ■

Existence de projections Soit $x \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ un élément normal et $\mathrm{U} \subseteq \mathbf{C}$ un ouvert non vide. Définissons

$$\mathcal{S}_{\mathrm{U}} = \left\{ f : \mathbf{C} \to [0, 1] \;\middle|\; f \text{ continue et } f\big|_{\mathrm{U}^c} = 0 \right\};$$

en vertu du lemme d'Urysohn, il existe de nombreuses fonctions dans $\mathcal{S}_{\mathrm{U}}$. Grâce au lemme précédent, la suite généralisée d'opérateurs $(f(x))_{f\in\mathcal{S}_{\mathrm{U}}}$ admet un supremum, que nous noterons $\mathbb{1}_{\mathrm{U}}(x)$ et qui appartient à $\mathscr{A}$, l'algèbre de von Neumann engendrée par x et $\mathbb{1}_{\mathcal{H}}$.

Grâce au lemme d'Urysohn, à la continuité forte de la multiplication sur les ensembles bornés et à la continuité faible de l'adjonction, il est aisé de voir que $\mathbb{1}_{\mathrm{U}}(x)$ est une projection dans $\mathscr{A}$, qui est non nulle dès que $\mathrm{U} \cap (\mathrm{sp}(x) \setminus \{0\})$ est non vide et qu'en outre $\mathbb{1}_{\mathrm{U}}(x) \nearrow \mathbb{1}$ quand U croît vers $\mathbf{C}$ (ou, de façon équivalente, que $\mathrm{U} \cap \mathrm{sp}(x)$ croît vers $\mathrm{sp}(x)$).

Définition 4.10. — *L'élément* $\mathbb{1}_{\mathrm{U}}(x)$ *défini ci-dessus est appelé la* projection spectrale *de x correspondant à* U.

Similairement, nous pouvons construire $\mathbb{1}_{\mathrm{F}}(x)$ en considérant l'infinum des $f(x)$ pour f une fonction continue $\mathbf{C} \to [0, 1]$ telle que $f\big|_{\mathrm{F}} = 1$, où F est fermé. Clairement, $\mathbb{1}_{\mathrm{U}}(x) + \mathbb{1}_{\mathrm{U}^c}(x) = \mathbb{1}$ et $\mathbb{1}_{\mathrm{U}}(x)\mathbb{1}_{\mathrm{U}^c}(x) = 0$. Grâce aux partitions de l'unité, nous obtenons alors immédiatement le résultat suivant.

Proposition 4.11. — *Soient $\varepsilon > 0$, $x \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ un élément normal et $\mathscr{A}$ l'algèbre de von Neumann engendrée par x (et $\mathbb{1}$). Alors il existe $y \in \mathscr{A}$ de spectre fini et tel que $\| x - y \| < \varepsilon$.*

Corollaire 4.12. — *Soient $\mathscr{A}$ une algèbre de von Neumann et $\mathcal{P}(\mathscr{A})$ l'ensemble de ses projections. Alors l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{P}(\mathscr{A})$ est dense dans $\mathscr{A}$, pour la topologie de la norme.*

Constatons avec ravissement que nous obtenons un résultat de densité pour la topologie de la norme alors que nous n'avons utilisé que la topologie forte pour définir les projections spectrales !

Fonctions fortement continues Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction continue. On dit que f est *fortement continue* si pour toute suite généralisée d'éléments hermitiens (x_i) convergeant vers x pour la topologie forte, la suite $f(x_i)$ converge aussi vers $f(x)$ pour la topologie forte.

Lemme 4.13. — *Toute fonction de $\mathscr{C}_0(\mathbf{R})$ est fortement continue.*

Démonstration. — Il est clair que si $\{f_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ est une suite convergeant uniformément vers f, alors si toutes les f_i sont fortement continues, f l'est aussi.

Exercice 4.14. — Montrer que pour tout $\alpha > 0$, la fonction $f_\alpha\colon t \mapsto \frac{\alpha t}{1+(\alpha t)^2}$ est fortement continue. En déduire que toute les fonctions de la sous-algèbre de $\mathscr{C}_0(\mathbf{R})$ engendrée par les f_α sont aussi fortement continues.

Selon l'exercice, le lemme se déduit du théorème de Stone–Weierstraß. (Notons qu'on peut identifier les fonctions $\mathscr{C}_0(\mathbf{R})$ comme l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{T}$ et nulles en le point infini.) ∎

Exercice 4.15. — Montrer plus généralement que tout fonction $\mathcal{O}(t)$ est fortement continue. *Indication.* Soit $h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction $\mathcal{O}(t)$, alors $h \cdot f_1$ est bornée.

En particulier, cet exercice implique que $t \mapsto \exp(it)$ est fortement continue (ce que nous aurions aussi pu voir directement en considérant des ensembles bornés dans $\mathscr{B}(\mathcal{H})_h$).

4.2 Théorème de densité de Kaplansky

Théorème 4.16 (Kaplansky). — *Soit $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{H})$ une algèbre de von Neumann et $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{M}$ une sous-algèbre hermitienne, dense pour la topologie faible. Alors, $(\mathscr{A})_1$ est fortement dense dans $(\mathscr{M})_1$. De plus, le même résultat de densité est vrai en considérant les ensembles des éléments hermitiens ou positifs, et si $\mathscr{A}$ est une algèbre stellaire unifère, les ensembles des éléments unitaires.*

Démonstration. — En remplaçant $\mathscr{A}$ par sa fermeture en norme, on peut supposer tout de suite que $\mathscr{A}$ est une algèbre stellaire (non nécessairement unifère).

Soit $x \in (\mathscr{M}_h)_1$; par l'exercice 1.24 il existe une suite généralisée $(x_i)_{i\in \mathrm{I}} \subseteq \mathscr{A}_h$ convergeant fortement vers x. Soit $f \colon \mathbf{R} \to [-1,1]$ une fonction fortement continue telle que $f|_{[-1,1]} = \mathrm{id}$. Alors $f(x_i)$ converge aussi pour la topologie forte vers $f(x)$, mais $f(x) = x$. Par ailleurs, notons que, par le théorème de Gelfand–Naimark, $\| f(x_i) \| \leq \| f \|_\infty$, d'où $f(x_i) \in (\mathscr{A}_h)_1$ pour tout $i \in \mathrm{I}$. La densité de $(\mathscr{A}_+)_1$ dans $(\mathscr{M}_+)_1$ se démontre avec le même argument.

En particulier, $\mathbb{1} \in \overline{(\mathrm{A}_+)_1}^{\text{forte}}$, et on voit facilement qu'on peut supposer de ce point que $\mathscr{A}$ est unifère.

Ensuite, nous montrons la densité forte de $\mathcal{U}(\mathscr{A})$ dans $\mathcal{U}(\mathscr{M})$. Grâce à la proposition 4.11, il suffit de noter que pour tout $u \in \mathcal{U}(\mathscr{A})$ de *spectre fini*, il existe des $u_j \in \mathcal{U}(\mathscr{A})$ convergeant fortement vers u. Mais maintenant, puisque $\sharp\,\mathrm{sp}(u) < \infty$, il existe une détermination continue du logarithme sur un domaine ouvert contenant $\mathrm{sp}(u)$, appelons-la log. Soit $x = i\log(u) \in (\mathscr{M}_h)_1$.

Selon la première partie de la démonstration, on peut prendre une suite généralisée $(x_j)_j \subseteq (\mathscr{A}_h)_1$ convergeant vers x et choisir $u_j := \exp(-ix_j)$.

Finalement, nous sommes prêts à montrer la densité forte de $(\mathscr{A})_1$ dans $(\mathscr{M})_1$. Soit $x \in (\mathscr{M})_1$ et écrivons $x = v|x|$, la décomposition polaire de x. Grâce à la continuité forte de la multiplication sur les ensembles bornés et ce qui précède, il suffit de montrer que l'isométrie partielle v appartient à l'adhérence forte de $(\mathscr{A})_1$.

Posons $p = v^*v$ et $q = vv^*$. Alors l'élement

$$u = \begin{pmatrix} v & q^\perp \\ p^\perp & v^* \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2 \otimes \mathscr{M} = \mathrm{M}_2(\mathscr{M}) \tag{4.2}$$

est clairement unitaire. Par ce qui précède il existe une suite généralisée $(u_i)_i \subseteq \mathrm{M}_2(\mathscr{A})$ convergeant fortement vers u dans $\mathrm{M}_2(\mathscr{M})$. On vérifie facilement ensuite qu'après avoir identifié $\mathscr{M} \simeq \mathrm{P}.\mathrm{M}_2(\mathscr{M}).\mathrm{P}$ où $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, la suite généralisée $\mathrm{P}u_i\mathrm{P}$ converge vers v. (Notons que clairement $\|\mathrm{P}u_i\mathrm{P}\| \leq 1$.) ∎

Table des matières